НОВЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.В. Лапин, А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец

Санкт-Петербургский государственный технический университет, 195251, С-Пб, ул. Политехническая, д. 29.

АННОТАЦИЯ

В рамках двухслойной клаузеровской схемы турбулентного пограничного слоя построены две новые алгебраические модели турбулентности для достаточно широкого класса течений, характеризующихся немонотонным, т. е. с наличием максимума, характером распределения касательного напряжения внутри пограничного слоя. Отличительной особенностью моделей является способ определения скоростного масштаба турбулентности во внешней области пограничного слоя, базирующийся на традиционных соображениях теории размерностей, распределении касательных напряжений поперек слоя и знании законов стенки во внутренней области.

В рамках первой из моделей (ГЛС-1) показано, что уравнения для первых моментов, записанные в переменных закона стенки, в сочетании с обобщенным законом стенки и условием локального равновесия на границе внутренней и внешней областей, выражающим максимум касательных напряжений для плоских течений или их момента для осесимметричного течения, являются самодостаточными для построения эффективной модели турбулентности широкого спектра действия.

Во второй из предлагаемых моделей (ГЛС-2) скоростной масштаб во внешней области пограничного слоя определяется из уравнения Брэдшоу-Ферриссa-Атвелла (БФА) для турбулентных напряжений с использованием упомянутого выше условия локального равновесия и обобщенного закона стенки. Это обеспечивает возможность учета влияния на масштаб не только внешних факторов (продольный градиент давления, вдув, отсос, поперечная кривизна), но и основных механизмов переноса турбулентных касательных напряжений (конвекции, диффузии, генерации и диссипации), что и определяет в конечном итоге достаточно широкие возможности модели.

Приводятся результаты тестирования обеих моделей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка алгебраических моделей турбулентной вязкости включает в качестве необходимого этапа выбор линейных и скоростных масштабов турбулентности для различных областей пограничного слоя. Опыт построения алгебраических моделей турбулентности для пристенных турбулентных пограничных слоев, накопленный в последние годы [1-3], свидетельствует о том, что модели, в которых выбор скоростного масштаба базируется на использовании касательного напряжения, могут быть достаточно эффективными.

Связь между скоростным масштабом V_s и характерным касательным напряжением τ_s следует непосредственно из соображений размерности ($V_s = \sqrt{\tau_s/\rho}$), однако вопрос о конкретном выборе величины τ_s является далеко нетривиальным и требует специального анализа.

В том случае, если величина производной от касательного напряжения на стенке $(\partial\tau/\partial y)_{y=0} \le 0$, τ монотонно изменяется от наибольшего значения на стенке τ_w до нуля на внешней границе. При этом в рамках двухслойной клаузеровской схемы в качестве скоростного масштаба во внешней (V_{so}) и внутренней (V_{si}) областях пограничного слоя можно использовать один и тот же масштаб, а именно динамическую скорость: $V_{so}=V_{si}=V_*$ ($V_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$) [1, 2]. В другом случае ($(\partial\tau/\partial y)_{y=0} > 0$) реализуется течение с немонотонным, имеющим максимум характером изменения касательного напряжения внутри пограничного слоя, и за масштаб τ во внешней области можно принять [2] его максимальное значение τ_m, т. е. $V_{so} = \sqrt{\tau_m/\rho}$. Положение точки максимума и значение τ_m могут быть определены непосредственно из уравнения движения с учетом того, что $(\partial\tau/\partial y) = 0$ при $y=y_m$. Подобный прием был достаточно успешно использован при построении алгебраической модели турбулентности для плоских течений с положительным градиентом давления в [2]. В данной работе аналогичный по сути подход применен для построения двух более общих моделей турбулентности, включающих учет влияния одновременно действующих факторов — продольного перепада давления, вдува (отсоса) газа через пористую поверхность, поперечной кривизны поверхности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Уравнения двумерного (плоского и осесимметричного) стационарного пограничного слоя имеют вид:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(r^\alpha \tau\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(r^\alpha u\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(r^\alpha v\right)}{\partial y} = 0\,. \tag{2}$$

Граничные условия к системе уравнений (1), (2) имеют вид:

$$u = 0, v = V_w \text{ при } y = 0;\quad u \to U_e \text{ при } y \to \infty \tag{3}$$

где V_w — скорость вдува (V_w>0) или отсоса (V_w<0), а U_e — скорость на внешней границе пограничного слоя.

Оставаясь в рамках двухслойной клаузеровской схемы пограничного слоя и не касаясь пока проблемы определения скоростных масштабов V_{si} и V_{so} во внутренней (i) и внешней (o) областях, а также сохраняя традиционные для этой схемы линейные масштабы (y и δ^* соответственно), запишем модель турбулентной вязкости в следующем виде

$$\nu_T = \kappa \cdot \min\left\{yV_{si}D, \delta^* V_{so}\gamma\right. . \quad (4)$$

Для демпфирующего множителя D и параметра перемежаемости γ примем их форму, апробированную в работе [2] для пограничных слоев с положительным градиентом давления:

$$D = \left[1 - \exp(-yV_{si}/\nu A)\right]^3, \quad \gamma = \left[1 + 5.5(y/\delta)^6\right]^{-1} \quad (5)$$

где κ=0.436 — константа Кармана, A=13. Отметим, что для осесимметричных течений линейный масштаб внешней области, в качестве которого принимается толщина вытеснения пограничного слоя δ^*, определяется соотношением [4]

$$\delta^* = \sqrt{r_w^2 + 2\int_0^\delta (1 - u/U_e)(r_w + y)dy} - r_w \quad (6)$$

Для плоского течения ($r_w \to \infty$) выражение (6) принимает традиционную форму

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - u/U_e)dy \quad (7)$$

3. СКОРОСТНОЙ МАСШТАБ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ V_{SI} ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ГЛС-1 И ГЛС-2.

Для определения скоростного масштаба во внутренней области воспользуемся уравнениями (1)-(2), записанными в переменных закона стенки [5]

$$\xi = x, \eta = yV_*/\nu, \varphi = \varphi(\eta), \varphi = u/V_* \quad (8)$$

Исключая поперечную скорость v из уравнения (1) с помощью уравнения неразрывности (2), получим

$$\frac{1}{r^+}\frac{\partial(r^+\bar{\tau})}{\partial\eta} = \frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx}\varphi^2\left(1 + \frac{K}{r^+\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\eta}\int_0^\eta \varphi\eta d\eta\right) + \quad (9)$$
$$+\frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{1}{r^+}\frac{dr_w}{dx}\frac{d\varphi}{d\eta}\int_0^\eta \varphi d\eta$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau/\tau_w, B_* = V_w/V_*$ — параметр вдува (отсоса), $r^+ = rV_*/\nu$.

Предполагая, что конвективными членами (первое слагаемое в правой части (9)) во внутренней области можно пренебречь, а также ограничивая рассмотрение частным случаем r_w=const, получим

$$\frac{1}{r^+}\frac{\partial(r^+\bar{\tau})}{\partial\eta} = \frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta} \quad (10)$$

Интегрируя это уравнение от 0 до η, получим выражение для распределения касательного напряжения во внутренней области пограничного слоя

$$\bar{\tau} = \frac{r_w}{r}\left[1 + B_*\varphi + \frac{dp}{dx}\frac{y}{\tau_w}\left(1 + \frac{K}{2}\frac{y}{r_w}\right)\right] \quad (11)$$

С учетом ранее постулированной связи между τ и V_{si} ($V_{si} = \sqrt{\tau/\rho}$) и соотношения для касательного напряжения (11), выражение для скоростного масштаба во внутренней области принимает следующий вид:

$$V_{si} = V_*\sqrt{\frac{\left[1 + B_*\varphi + \dfrac{dp}{dx}\dfrac{y}{\tau_w}\left(1 + \dfrac{K}{2}\dfrac{y}{r_w}\right)\right]}{1 + Ky/r_w}}. \quad (12)$$

4. СКОРОСТНОЙ МАСШТАБ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ V_{SO} ДЛЯ МОДЕЛИ ГЛС-1.

При определении скоростного масштаба V_{so} для плоского течения будем предполагать, что граница внутренней и внешней областей (y_m) совпадает с точкой максимума касательного напряжения (τ_m), т.е. с точкой, в которой выполняется условие $(\partial\tau/\partial y)_{y=y_m} = 0$. Таким образом, граница областей рассматривается как линия, на которой достигается баланс (локальное равновесие) силовых воздействий всех факторов, действующих на течение, включая конвекцию, вдув (отсос), градиент давления.

В осесимметричном течении, в отличие от плоского, в связи с появлением дополнительного линейного масштаба (r_w), уравнение движения выражает баланс моментов всех сил, действующих на течение. Поэтому в качестве границы внутренней и внешней областей (y_m) естественно принять точку, в которой достигается максимум момента касательного напряжения ($\tau_m r_m$), т.е. точку, в которой выполняется условие: $(\partial(r\tau)/\partial y)_{y=y_m} = 0$. Скоростной масштаб в этом случае будет определяться по значению τ_m, имеющему место в точке максимума момента касательного напряжения, а не в точке, соответствующей максимальному значению $\tau=\tau_{max}$.

В обоих случаях для определения как максимального касательного напряжения τ_m в плоском течении, так и τ_m в точке максимума момента касательного напряжения в осесимметричном течении можно воспользоваться интегралом уравнения движения (9). Это уравнение, записанное в переменных закона стенки, справедливо во всей внутренней области, в том числе и на ее границе с внешней областью, определенной так, как описано выше. Однако прежде чем интегрировать это уравнение, проведем его некоторые упрощения. В частности, можно показать, что влияние поперечной кривизны на конвекцию, выражаемое вторым слагаемым в первом члене правой части уравнения (9), оказывается незначительным в области логарифмического профиля скорости, независимо от величины параметра δ/r_w. Кроме того, как и ранее, ограничимся рассмотрением случая: r_w=const, dr_w/dx=0.

С учетом сделанных оценок и ограничений уравнение (9) может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\eta} = \frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx}\varphi^2 + \frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta} - K\frac{\bar{\tau}}{r^+} \quad (13)$$

Интегрируя это уравнение от стенки до границы внутренней и внешней областей ($0 \le \eta \le \eta_m$) получим:

$$\bar{\tau}_m = 1 + \frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx}\int_0^{\eta_m}\varphi^2 d\eta + \frac{dp}{dx}\frac{\nu\eta_m}{V_*\tau_w} + B_*\int_0^{\eta_m}\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta}d\eta - K\int_0^{\eta_m}\frac{\bar{\tau}}{r^+}d\eta \tag{14}$$

Из уравнения (13) и граничных условий на стенке (3) непосредственно следует условие существования максимума касательного напряжения внутри пограничного слоя:

$$\left(\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_{\eta=0} - \frac{K}{r_w^+} > 0\,. \tag{15}$$

Для плоского течения ($r_w \to \infty$) это условие упрощается в связи с обращением в ноль последнего члена в правой части равенства (15). При выполнении условия (15), т. е. при определенном соотношении «внешних» факторов (продольный перепад давления, вдув (отсос), поперечная кривизна), на границе внутренней и внешней областей устанавливается локальное равновесие (баланс) моментов всех сил, действующих на течение. Условие, выражающее этот баланс, прямо вытекает из уравнения (9) с учетом обращения в ноль производной от момента касательного напряжения: $(\partial(r\tau)/\partial\eta)_{\eta=\eta_m} = 0$. При принятых ранее допущениях о возможности неучета влияния поперечной кривизны на конвекцию и r_w=const, условие локального равновесия принимает вид:

$$-\frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx} = \frac{1}{\varphi_m^2}\left[\frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\frac{r_w}{r_m}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m\right] \tag{16}$$

Аналог этого условия для плоского течения нетрудно получить, заметив, что множитель r_w/r_m во втором члене правой части (16) обращается в единицу при $r_w \to \infty$. Исключая параметр $\dfrac{\nu}{V_*^2}\dfrac{dV_*}{dx}$ из выражения (14) с помощью условия (16), получим:

$$\bar{\tau}_m = 1 + \frac{dp}{dx}\frac{\nu\eta_m}{V_*\tau_w} + B_*\int_0^{\eta_m}\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta}d\eta - K\int_0^{\eta_m}\frac{\bar{\tau}}{r^+}d\eta - \frac{1}{\varphi_m^2}\left[\frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx} + B_*\frac{r_w}{r_m}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m\right]\cdot\int_0^{\eta_m}\varphi^2 d\eta \tag{17}$$

При обращении интегралов, входящих в правую часть соотношения (17), воспользуемся их представлением в виде убывающих асимптотических разложений, получаемых неоднократным интегрированием по частям. Ограничиваясь двухчленными представлениями, обеспечивающими необходимую точность в вычислении интегралов, будем иметь:

$$\int_0^{\eta_m}\varphi^2 d\eta = \varphi_m^2\eta_m\left(1 - 2\Phi_m\right),\quad \Phi_m = \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m\frac{\eta_m}{\varphi_m} \tag{18}$$

$$\int_0^{\eta_m}\frac{r_w}{r}\frac{d\varphi}{d\eta}d\eta = \varphi_m\Phi_m\frac{r_w}{r_m}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y_m}{r_m}\right)\right] \tag{19}$$

$$\int_0^{\eta_m}\frac{\bar{\tau}}{r^+}d\eta = \frac{\bar{\tau}_m}{r_m^+}\eta_m\left[1 + \frac{1}{2}\frac{y_m}{r_m}\right] \tag{20}$$

Используя для детализации $\bar{\tau}_m$ в правой части (20) распределение $\bar{\tau}$ во внутренней области (11), получим:

$$\int_0^{\eta_m}\frac{\bar{\tau}}{r^+}d\eta = \frac{y_m r_w}{r_m^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y_m}{r_m}\right) * \left[1 + B_*\varphi_m + \frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w}\left(1 + \frac{K}{2}\frac{y_m}{r_w}\right)\right] \tag{21}$$

Соотношение для параметра $\bar{\tau}_m$ (17) и представления интегралов (18)-(19), входящих в это соотношение, содержат параметр $d\varphi/d\eta = f(\eta)$, характеризующий форму закона стенки в том или ином течении. Имеющиеся опытные данные по профилям скорости в пограничных слоях свидетельствуют о том, что обобщенный закон стенки [6-8] может быть записан в форме:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{\kappa\eta}\sqrt{\frac{r_w}{r}\left(1 + B_*\varphi_m\right)} \tag{22}$$

Возвращаясь к соотношению (17), подставим в него равенства (18), (19) и (21), тогда после необходимых упрощений, и принимая во внимание тот факт, что $V_{so} = \sqrt{\tau_m/\rho}$, получим выражение для скоростного масштаба во внешней области:

$$V_{so} = V_*\left\{1 + 2\Phi_m\frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w} + \frac{1}{2}B_*\varphi_m\Phi_m\frac{r_w}{r_m}\left(1 + \frac{y_m}{r_m} + 4\Phi_m\right) - K\frac{y_m r_w}{r_m^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y_m}{r_m}\right)\left[1 + B_*\varphi_m + \frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w}\left(1 + \frac{K}{2}\frac{y_m}{r_w}\right)\right]\right\}^{1/2} \tag{23}$$

$$\Phi_m = \frac{1}{\kappa\varphi_m}\sqrt{\frac{1 + B_*\varphi_m}{r_m/r_w}},\quad r_m = r_w + y_m \tag{24}$$

Совокупность соотношений (4)-(7), (12) и (23)-(24) составляет предлагаемую алгебраическую модель турбулентной вязкости для пристенных пограничных слоев с максимумом касательных напряжений внутри слоя. Подчеркнем, что область применения полученной модели турбулентности ограничивается условиями (15), (16).

Далее рассмотрим некоторые частные случаи, ограничившись записью лишь скоростного масштаба во внешней области V_{so}.

1. Течение на плоской ($r_w \to \infty$), непроницаемой (B_*=0) поверхности при наличии положительного градиента давления (dp/dx>0)

$$V_{so} = V_*\left(1 + \frac{2}{\kappa\varphi_m}\frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w}\right)^{1/2} \tag{25}$$

Эта модель первоначально предложена в работе [2]. Там же приведены результаты ее достаточно детального тестирования, свидетельствующие о ее высокой эффективности при описании характеристик турбулентных пограничных слоев с отрывом.

2. Течение на плоской ($r_w \to \infty$), проницаемой (B_*>0) пластине (dp/dx=0) – модель «чистого» вдува

$$V_{so} = V_*\left[1 + \frac{B_*\sqrt{1 + B_*\varphi_m}}{2\kappa}\left(1 + \frac{4\sqrt{1 + B_*\varphi_m}}{\kappa\varphi_m}\right)\right]^{1/2} \tag{26}$$

5. СКОРОСТНОЙ МАСШТАБ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГЛС-2.

Для определения V_{so} воспользуемся уравнением Брэдшоу-Феррисса-Атвелла (БФА) [9] с модифицированным описанием диффузионного члена, предложенным в работе Ли и Харша [10]:

$$\frac{1}{a_1}\left(u\frac{\partial\tau}{\partial x}+v\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)=\frac{1}{a_1 r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y}\left(r^{\alpha}\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)+ \\ +\tau\frac{\partial u}{\partial y}-\rho\frac{(\tau/\rho)^{1.5}}{L}. \tag{27}$$

Здесь a_1=0.31 эмпирическая постоянная в соотношении Невзглядова-Драйдена

$$\tau/\rho E = a_1\,, \tag{28}$$

E — кинетическая энергия турбулентности, σ_k — число Прандтля для кинетической энергии турбулентности, L — масштаб диссипации.

Переходя в уравнении БФА (27) к переменным закона стенки (8) и используя безразмерное касательное напряжение $\bar{\tau}=\tau/\tau_w$, преобразуем его к виду

$$\frac{1}{a_1}\left(\varphi\frac{\nu}{v_*}\left[\frac{\bar{\tau}}{\tau_w}\frac{d\tau_w}{dx}+\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\xi}\right]+B_*\frac{d\bar{\tau}}{d\eta}\right)= \\ =\frac{1}{a_1\sigma_k r^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(r^{\alpha}\frac{\nu_T}{\nu}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\eta}\right)+\bar{\tau}\frac{d\varphi}{d\eta}-\frac{\bar{\tau}^{1.5}}{L^+}. \tag{29}$$

Применим это уравнение к границе внутренней и внешней области, предполагая, что эта граница совпадает с точкой максимума касательного напряжения, то есть, что в ней $(\partial\bar{\tau}/\partial\eta)_{\eta=\eta_m}=0$ (условие существования максимума касательного напряжения, как и ранее определяется соотношением (15)). В результате получим:

$$\frac{1}{a_1}\left(\varphi_m\frac{\nu}{V_*}\frac{d\bar{\tau}_m}{dx}+\bar{\tau}_m\varphi_m\frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{d\tau_w}{dx}\right)= \\ =\frac{\nu_{TO}/\nu}{a_1\sigma_k}\left(\frac{\partial^2\bar{\tau}}{\partial\eta^2}\right)_m+\bar{\tau}_m\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m-\frac{\bar{\tau}_m^{1.5}}{L_m^+}. \tag{30}$$

Как было показано в [9] на основании анализа экспериментальных данных, масштаб диссипации L, может быть идентифицирован с прандтлевским путем турбулентного перемешивания (во внутренней области L=κη). В этом случае величина $L^{`}_{m}$, входящая в (30), может быть представлена в следующей форме: $L^{`}_{m}=\kappa\eta_m$.

Возвращаясь к уравнению (30), заметим, что значение производной $(\partial^2\bar{\tau}/\partial\eta^2)_m$, входящей в диффузионный член этого уравнения, может быть найдено из (10) с использованием соотношений

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right)_m=-\frac{1}{\eta_m}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m,\ \frac{\nu_{TO}}{\nu}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m=\bar{\tau}_m=\bar{V}_{so}^2, \tag{31}$$

а также (22).

После несложных преобразований (30) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения скоростного масштаба во внешней области пограничного слоя

$$\frac{2\kappa\varphi_m}{a_1}\frac{y_m}{\bar{V}_{so}}\frac{d\bar{V}_{so}}{dx}+\bar{V}_{so}\left[1-\frac{\kappa^2}{a_1\sigma_k}\frac{y_m\delta^*}{r_m^2}\right]= \\ =\kappa\eta_m\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m-\frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx}\left(1-\frac{1}{\sigma_k}\right)\frac{2\kappa\eta_m\varphi_m}{a_1}- \\ -\frac{\kappa B_*}{a_1\sigma_k}\frac{r_w}{r_m}\left(1+\frac{y_m}{r_m}\right). \tag{32}$$

Соотношения (4)–(7), (12) и (32) можно рассматривать как «полудифференциальную» (включающую одно обыкновенное дифференциальное уравенение) модель турбулентности. Однако, на данном этапе ограничимся алгебраическим приближением уравнения (32), приняв допущение о локальной автомодельности параметра $\bar{V}_{so}$, т. е. о его независимости от координаты x: $d\bar{V}_{so}/dx=0$.

Для использования (32) необходимо явно определить входящую в него величину dV_*/dx.

При выполнении условия (15) в точке η_m максимума $\bar{\tau}$, в которой $(\partial\bar{\tau}/\partial\eta)_m=0$, выполняется соотношение, непосредственно вытекающее из уравнения (13)

$$-\frac{\nu}{V_*^2}\frac{dV_*}{dx}= \\ =\frac{1}{\varphi_m^2}\left[\frac{\nu}{V_*\tau_w}\frac{dp}{dx}+B_*\frac{r_w}{r}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_m-K\frac{\bar{\tau}_m}{r_m^+}\right]. \tag{33}$$

Величину $\bar{\tau}_m$ в правой части (33) можно определить с использованием (11).

С учетом сделанных допущений уравнение для скоростного масштаба во внешней области пограничного слоя $\bar{V}_{so}$ (32) приобретает форму алгебраического соотношения

$$\bar{V}_{so}=\left\{\sqrt{\frac{1+B_*\varphi_m}{1+y_m/r_w}}+\frac{2\kappa}{a_1\varphi_m}\left(1-\frac{1}{\sigma_k}\right)\frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w}+\right. \\ +\frac{2}{a_1\varphi_m}\left(1-\frac{1}{\sigma_k}\right)B_*\frac{r_w}{r_m}\sqrt{\frac{1+B_*\varphi_m}{1+y_m/r_w}}-\frac{\kappa B_*}{a_1\sigma_{kB}}- \\ -\frac{2\kappa K}{a_1\varphi_m}\left(1-\frac{1}{\sigma_k}\right)\frac{y_m/r_w}{(1+y_m/r_w)^2}* \\ \left.*\left[1+B_*\varphi_m+\frac{dp}{dx}\frac{y_m}{\tau_w}\left(1+\frac{K}{2}\frac{y_m}{r_w}\right)\right]\right\}* \\ *\left[1+\frac{\kappa^2}{a_1\sigma_k}\frac{y_m\delta^*}{r_m^2}\right]^{-1} \tag{34}$$

Совокупность соотношений (4)–(7), (12) и (34) составляет искомую алгебраическую модель турбулентной вязкости для пристенных пограничных слоев с максимумом касательного напряжения внутри слоя.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛИ.

Для тестирования предложенных моделей были проведены расчеты турбулентных пограничных слоев, по которым в литературе имеются достаточно надежные опытные данные. В частности, были рассмотрены пограничные слои на плоской поверхности при наличии среднего (опыт 4800 [11]) и сильного (опыт 0141 [12]) положительного градиента давления а также пограничный слой с сильным положительным градиентом давления на продольно обтекаемом цилиндре [4] и на плоской проницаемой (при наличиии вдува) поверхности [13]. Кроме того, результаты расчетов по предложенным моделям сравнивались с результатами, полученными на основе других наиболее представительных моделей: дифференциальной модели с одним уравнением для турбулентной вязкости Спаларта и Аллмареса [14] и дифференциальной k-ω модели Ментера [15]. Отметим, что при проведении расчетов пограничных слоев с градиентом давления использовался так называемый обратный метод [18].

Результаты расчетов представлены на рисунке в форме продольных распределений коэффициента трения $C_f = 2\tau_w / \rho U_e^2$, формпараметра пограничного слоя $H=\delta^*/\theta$, профилей скорости $u/U_e=f(y)$; $u^+(y^+)$ и касательного напряжения $-\overline{u'v'}/U_e^2 = f(y)$.

Отметим, что на предварительной стадии описанных расчетов было замечено, что наилучшее согласование результатов с опытными данными по разным течениям достигается при разных значениях числа Прандля σ_k, входящего в соотношение (34). В частности, было найдено, что на непроницаемых поверхностях (B_*=0) оптимальные в этом смысле значения числа Прандля для плоских (σ_{kp}) и осесимметричных (σ_{kr}) пограничных слоев одинаковы и равны $\sigma_{kp}=\sigma_{kr}=1.4$, а для течений со вдувом $\sigma_{kB}=0.35$. Анализ представленных на рисунке результатов свидетельствует о том, что обе предлагаемые модели во всех рассмотренных случаях обеспечивают достаточно высокую точность расчета основных параметров пограничного слоя и, по крайней мере, не уступают в этом отношении другим моделям. Следует также подчеркнуть, что благодаря использованию при построении модели ГЛС-2 уравнения БФА, она, в отличие от обычных алгебраических моделей, позволяет произвести оценку вклада отдельных механизмов переноса турбулентности в формирование уровня максимальной турбулентной вязкости в пограничном слое. Действительно, если идентифицировать отдельные члены в соотношении (34) с соответствующимим членами исходного уравнения БФА (27), то нетрудно показать, что левая часть уравнения (34) описывает диссипацию турбулентных напряжений, первый член в правой части – их генерацию, члены, содержащие число Прандтля σ_k – диффузию, а остальные члены - конвекцию. При этом диффузионные и конвективные члены в явной форме определяются внешними условиями (градиентом давления, вдувом/отсосом, поперечной кривизной).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

x, y — оси координат, направленные вдоль обтекаемой поверхности и по нормали к ней;
u, v — проекции скорости на оси x, y соответственно;
ρ — плотность;
p — давление;
$r=r_w+Ky$ — локальный радиус поперечной кривизны;
r_w — радиус поперечной кривизны поверхности;
K=+1 и K=-1для выпуклой и вогнутой поверхности соответственно;
α=0 — плоское течение;
α=1 — осесимметричное течение;
τ — касательное напряжение;
δ — толщина пограничного слоя;
$B_*=V_w/V_*$ — параметр вдува (отсоса);
φ, η — переменные закона стенки (8);
δ^* — толщина вытеснения;
$\bar{\tau} = \tau/\tau_w$
σ_k — число Прандтля для кинетической энергии турбулентности

Индексы:
w — параметры на стенке;
e — параметры на внешней границе пограничного слоя;
m — параметры в точке, где достигает максимума τ (или $r\tau$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лапин Ю.В., Поспелов В.А.* // Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. ТВТ, 1995, т. 33, № 3, Стр. 422.
2. *Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* // Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным перепадом давления. ТВТ, 1999, т. 37, № 1, стр. 87-91.
3. *Лабусов А.Н., Лапин Ю.В.* // Алгебраическая модель турбулентного пограничного слоя на выпуклой криволинейной поверхности. ТВТ, 2000, т. 38, № 3, стр. 458-467.
4. *Dengel P., Fernholz H.H.* // An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation. JFM, 1990, v. 212, p. 615.
5. *Лапин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.
6. *Huang P.G., Bradshow P.* // Law of the Wall for Turbulent flows in pressure Gradient. AIAA Journal, 1995, v. 33, № 4, pp. 624-632.
7. *Townsend A.A.* // Equilibrium Layers and Wall Turbulence. JFM, 1961, v. 11, pp. 97-120.
8. *Лапин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М: Наука, 1970.
9. *Bradshow P., Ferriss D.H., Atwell N.P.* //Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. Journal of Fluid Mech., 1967, v. 28(3), pp. 593-616.
10. *Lee C.S., Harsha P.T.* // Use of turbulent kinetic energy in free mixing studies. AIAA Journal, 1970, v. 8, pp. 1026-1032.
11. *Coles D.E., Hirst E.A.* Computation of Turbulent Boundary Layers — 1968. AFOSR-IFP Stanford Conference. Vol. II. Stanford Univ., Palo Alto, CA.
12. *Samuel A.E., Joubert P.N.* // A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient. Journal of Fluid Mech, 1974, v. 66(3), p. 481.
13. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* // The turbulent boundary on a porous plate: an experimental study of the fluid mechanics for adverse free-stream pressure gradients. Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report N HMT-15, 1972.
14. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* // A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA Paper, 1992, AIAA-92-0439.
15. *Menter F.R.* // Zonal two equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows. AIAA Paper, 1993, AIAA-93-2906.

16. *Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* // Применение обратного метода решения уравнений пограничного слоя для тестирования моделей турбулентности. ТВТ, 1998, т. 36, № 4, стр. 607-616.

SUMMURY

U.V. Lapin, A.V. Garbaruk, M.Kh. Strelets (Saint-Petersburg State Technical University, 195251, Saint-Petersburg, Politecnicheskaya st., 29)

NEW ALGEBRAIC TURBULENCE MODELS FOR WALL-BOUNDARY FLOWS

In the framework of two-layer Klauser's treatment of turbulent boundary layer two new algebraic turbulence models are suggested for a rather wide range of tubulent flows, characterizing by a non-monotonic (with a maximum) distribution of the shear stress across the boundary layer. A distinguish features of the models is are a definition of the velocity scale in the outer region of the boundary layer based on the conventional similarity and dimension theory and, also, on the specific shear stress distribution and a wall-law in the inner region.